ISCTE IUL Instituto Universitário de Lisboa Lisbon University Institute	Departamento de Ciências e Tecnologias de Informação **Ano Lectivo 2011/2012**

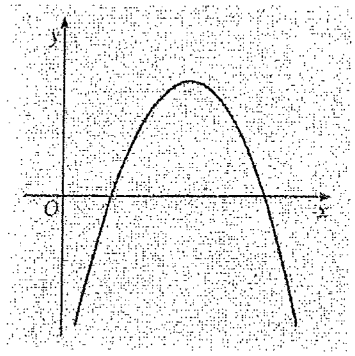
PROVA DE ACESSO DE MATEMÁTICA

Duração da Prova: **90 minutos** 23/Maio/2011

Grupo I

- **As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.**
- **Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.**
- **Escreva na sua folha de respostas apenas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.**
- **Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.**
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Na figura está representada parte de uma parábola, que é o gráfico de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.



Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

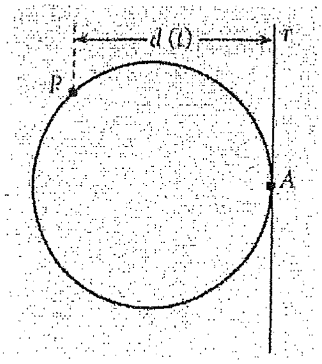
$$h(x) = g(x) \cdot (x+3)^2.$$

Qual pode ser o conjunto de zeros da função h?

(A) $\{2, 3, 4\}$ **(B)** $\{-3, 1, 4\}$ **(C)** $\{-3, 2, 3, 5\}$ **(D)** $\{-1, 5, 9\}$

2. Na figura estão representadas:

- Uma circunferência de raio 1;
- Uma recta r, tangente à circunferência no ponto A.

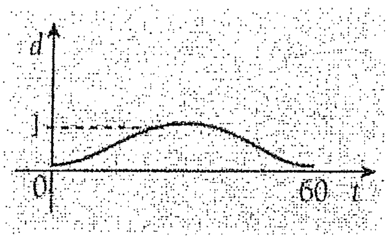


Admita que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre a circunferência, em sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, descrevendo uma única volta em sessenta segundos.

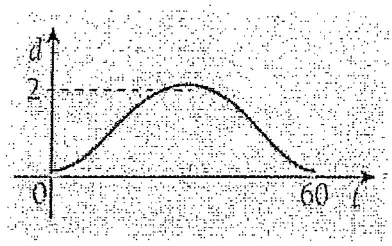
Seja $d(t)$ a distância do ponto P à recta r, t segundos após o início do movimento.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d?

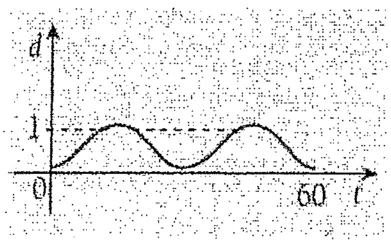
(A)



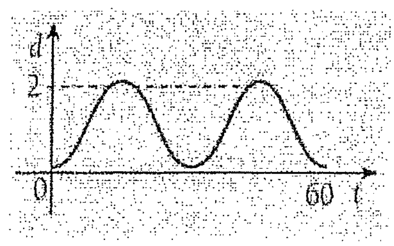
(B)



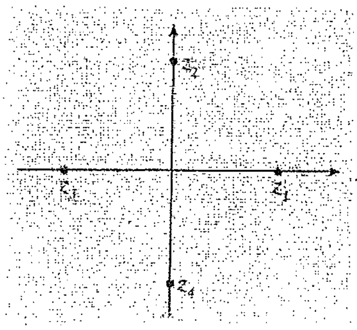
(C)



(D)



3. Seja w um número complexo diferente de 0, cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no primeiro quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.



Seja $\overline{w}$ o conjugado de w.

Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos: z_1, z_2, z_3 e z_4.

Qual deles pode ser igual a $\frac{w}{\overline{w}}$?

(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

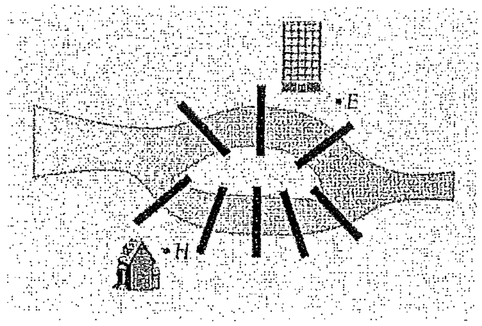
4. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$.

Qual poderá ser um argumento do **simétrico** de z?

(A) $\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\pi+\frac{\pi}{5}$ **(C)** $\pi-\frac{\pi}{5}$ **(D)** $2\pi+\frac{\pi}{5}$

5. Na figura ao lado estão representados:

- O rio que atravessa certa localidade;
- Uma ilha situada no leito desse rio;
- As oito pontes que ligam a ilha às margens.



H representa a habitação e E a escola de um jovem dessa localidade.

Para efectuar o percurso de **ida** (*casa-ilha-escola*) **e volta** (*escola-ilha-casa*), o jovem pode seguir vários caminhos, que diferem uns dos outros pela sequência das pontes utilizadas.

Indique quantos caminhos diferentes pode o jovem seguir, num percurso **de ida e volta, sem passar duas vezes pela mesma ponte.**

(A) $5\times3+4\times2$ **(B)** $5\times4\times3\times2$ **(C)** $5+4+3+2$ **(D)** $5^2\times3^2$

6. Num torneio de xadrez, cada jogador jogou uma partida com cada um dos outros jogadores.

Supondo que participaram no torneio dez jogadores, o número de partidas disputadas foi:

(A) ${}^{10}C_2$ **(B)** ${}^{10}C_9$ **(C)** $10!$ **(D)** 10×9

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.   **Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o valor exacto.**

1. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em **quilopascal**) é dada, em função da altitude h (em **quilómetros**), por

$$P(h) = 101e^{-0.12h}$$

a) A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico, Açores. A altitude do cume do Pico é 2350 metros. Qual é o valor da pressão atmosférica nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.

b) Determine x tal que, para qualquer h, $P(h+x) = \frac{1}{2} P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas. Interprete o valor obtido no contexto do problema.

2. Foi administrado um medicamento a um doente às 9 horas da manhã de um certo dia. A concentração desse medicamento, em miligramas por mililitro de sangue, t horas após ter sido administrado, é dada por

$$C(t) = 2te^{-0.3t}$$

a) Utilize o teorema de Bolzano para mostrar que houve um instante, entre as 9h30min e as 10h00min, em que a concentração de medicamento no sangue foi de 1 mg/ml.

b) Recorrendo à derivada da função C, determine o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima. Apresente o resultado em horas e minutos.

3. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Seja $z = 2\text{cis}\left(\frac{4}{3}\pi\right)$ um número complexo.

a) Escreva na forma trigonométrica: $\frac{\bar{z}}{z+2}$.

b) Determine o menor número natural n, tal que z^n $\mathbb{R}$.

4. Para representar Portugal num campeonato internacional de hóquei em patins foram seleccionados dez jogadores: dois guarda-redes, quatro defesas e quatro avançados.

   a) Sabendo que o treinador da Selecção Nacional opta por que Portugal jogue sempre com um guarda-redes, dois defesas e dois avançados, quantas equipas diferentes pode ele constituir?

   b) Um patrocinador da Selecção Nacional oferece uma viagem a cinco dos dez jogadores seleccionados, escolhidos ao acaso. Qual é a probabilidade de os dois guarda redes serem contemplados com essa viagem? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

COTAÇÕES

Grupo I		60
Cada resposta certa		10
Cada resposta errada		0
Cada questão não respondida ou anulada		0
Grupo II		140
1.		35
1.a)	15	
1.b)	20	
2.		35
2.a).	15	
2.b).	20	
3.		35
3.a).	15	
3.b).	20	
4.		35
4.a).	15	
4.b).	20	
TOTAL		200

ISCTE IUL Instituto Universitário de Lisboa Lisbon University Institute	Departamento de Ciências e Tecnologias de Informação **Ano Lectivo 2011/2012**

RESOLUÇÃO

DA

PROVA DE ACESSO DE MATEMÁTICA

23/Maio/2011

Grupo I

1 – (B)	2 – (B)	3 – (B)
4 – (B)	5 – (B)	6 – (A)

Grupo II

1.

$P(h) = 101\, e^{-0,12\, h}$

a)

$2350 \text{ m} = 2,35 \text{ km}$

$P(2,35) = 101\, e^{-0,12 \times 2,35} \approx 76$

A pressão atmosférica no cume do Pico é de, aproximadamente, 76 kPa .

b)

$P(h+x) = \frac{1}{2} P(h)\,,\ \forall h \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\ 101\, e^{-0,12(h+x)} = \frac{1}{2} \times 101\, e^{-0,12\, h}\,,\ \forall h \in \mathbb{R}\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ e^{-0,12\, h - 0,12\, x} = \frac{1}{2} e^{-0,12\, h}\,,\ \forall h \in \mathbb{R}\ \Leftrightarrow$

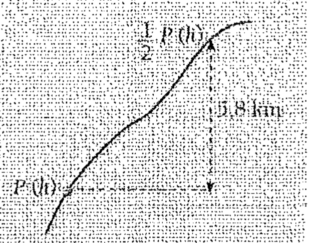
$\Leftrightarrow\ e^{-0,12\, h} e^{-0,12\, x} = \frac{1}{2} e^{-0,12\, h}\,,\ \forall h \in \mathbb{R}\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ e^{-0,12\, x} = \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ -0,12\, x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ -0,12\, x = -\ln(2)\ \Leftrightarrow\ x = \frac{\ln(2)}{0,12}\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x \approx 5,8$

A um aumento de 5,8 km em altitude corresponde uma redução da pressão atmosférica para metade.



2.

a)

(i) Como o medicamento foi administrado às 9 horas da manhã, este instante corresponde a $t = 0$.

- Dado que 9 h 30 min = 9,5 h e $9{,}5 - 9 = 0{,}5$, 9 h e 30 min corresponde a $t = \frac{1}{2}$.
- Como $10 - 9 = 1$, 10 h corresponde a $t = 1$.

(ii) $C(t)$ é uma função contínua, por ser definida pelo produto e pela composta de funções contínuas em $\mathbb{R}$ (a função $t \mapsto e^t$ é contínua em $\mathbb{R}$, e toda a função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.)

Portanto, C é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset \mathbb{R}$

(iii) $C\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} e^{-0{,}3 \times \frac{1}{2}} = 0{,}86$ (2 c. d.)

$C(1) = 2 \times 1 \times e^{-0{,}3 \times 1} = 1{,}48$ (2 c. d.)

De (i), (ii) e (iii) tem-se

$$\begin{cases} C \text{ é contínua em } \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ C\left(\frac{1}{2}\right) < 1 < C(1) \end{cases}$$

Então, pelo teorema de Bolzano, podemos afirmar que houve pelo menos um instante entre as 9 h 30 min $\left(t = \frac{1}{2}\right)$ e as 10 h $(t = 1)$ em que a concentração de medicamento foi de 1 mg/ml.

b)

$C'(t) = (2t \cdot e^{-0{,}3t})' = 2e^{-0{,}3t} + 2t(-0{,}3)e^{-0{,}3t} = 2e^{-0{,}3t}(1 - 0{,}3t)$

$C'(t) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-0{,}3t}(1 - 0{,}3t) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-0{,}3t} = 0 \vee 1 - 0{,}3t = 0 \Leftrightarrow 0{,}3t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{10}{3}$

$C'(t) > 0 \Leftrightarrow 2e^{-0{,}3t}(1 - 0{,}3t) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 0{,}3t > 0 \Leftrightarrow t < \frac{10}{3}$ $\quad 2e^{-0{,}3t} > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$

t	0		$\frac{10}{3}$		$+\infty$
$C'(t)$		+	0	−	
$C(t)$		↗		↘	
			Máximo		

A concentração é máxima para $t = \frac{10}{3}$.

Como $\frac{10}{3}\text{ h} = 3\text{ h} + \frac{1}{3}\text{ h} = 3\text{ h} + \frac{1}{3} 60\text{ min} = 3\text{ h } 20\text{ min}$.

A concentração do medicamento foi máxima às 12 h e 20 min (9 h + 3 h 20 min).

3.

a)

$z = 2\ \text{cis}\,\dfrac{4\pi}{3}$

$z + 2 = 2\ \text{cis}\,\dfrac{4\pi}{3} + 2 = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{4\pi}{3}\right) + 2 = 2\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\text{i}\right) + 2 =$

$= -1 - \sqrt{3}\,\text{i} + 2 = 1 - \sqrt{3}\,\text{i} =$

$= 2\ \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$w = 1 - \sqrt{3}\,\text{i}$

$|w| = \sqrt{1+3} = 2$

$\begin{cases} \text{tg}\,(\arg w) = -\sqrt{3} \\ (1\,,\ -\sqrt{3}) \in 4.^\circ\,\text{Q} \end{cases} \Longrightarrow \arg w = -\dfrac{\pi}{3}$

$\bar{z} = 2\ \text{cis}\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$

$$\frac{\bar{z}}{z+2} = \frac{2\ \text{cis}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}{2\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{2}\,\text{cis}\left(-\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \text{cis}\,(-\pi) = \text{cis}\,\pi$$

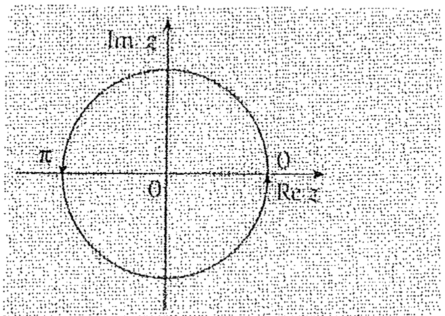
b)

$z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[2\ \text{cis}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right]^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^n\ \text{cis}\,\dfrac{4n\pi}{3} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{4n\pi}{3} = k\pi\,,\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4n}{3} = k \in \mathbb{Z}$

O menor valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual $\dfrac{4n}{3} \in \mathbb{Z}$ é $n = 3$.



$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = k\pi \vee |z| = 0\,,\ k \in \mathbb{Z}$

4.

a)

Guarda-redes	Defesas	Avançados
2	4	4
1	2	2

É possível constituir ${}^2C_1 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 = 2 \times 6 \times 6 = 72$ equipas diferentes.

b)

- Número de casos possíveis: ${}^{10}C_5 = 252$
- Número de casos favoráveis:

Guarda-redes	Outros
2	8
2	3

${}^2C_2 \times {}^8C_3 = 1 \times 56 = 56$

A probabilidade pedida é: $P = \dfrac{56}{252} = \dfrac{2}{9}$

COTAÇÕES

Grupo I	**60**
Cada resposta certa	10
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Grupo II	**140**
1.	35
1.a)	15
1.b)	20
2.	35
2.a).	15
2.b).	20
3.	35
3.a).	15
3.b).	20
4.	35
4.a).	15
4.b).	20
TOTAL	**200**